2010 年第 51 届 IMO 解答

1、求所有的函数 $f:R\to R$，使得对于任意实数 x,y 都有 $f\left(\left[x\right]y\right)=f(x)\left[f(y)\right]$。（其中 $\left[x\right]$ 表示不大于 x 的最大整数）

解 1：令 $y=0$ 可得 $f(0)=f(x)\left[f(0)\right]$(*)，若 $\left[f(0)\right]\neq 0$，则 $f(x)$ 是一个常数函数，令 $f(x)=c$，代入可得 $c=c\left[c\right]$，因此 $c=0$，或者 $\left[c\right]=1$ 也即 $1\le c<2$。

若 $\left[f(0)\right]=0$，由(*)可知 $f(0)=0$，令 $x=1$ 可得 $f(y)=f(1)\left[f(y)\right]$(#)，若 $f(1)\neq 0$，则 $\left[f(y)\right]=\dfrac{f(y)}{f(1)}$，因此 $f\left(\left[x\right]y\right)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(1)}$，对调 x,y 可得 $f\left(\left[y\right]x\right)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(1)}$，因此 $f\left(\left[x\right]y\right)=f\left(\left[y\right]x\right)$，此式中令 $x=2,y=\dfrac{1}{2}$ 可得 $f\left(1\right)=f\left(0\right)=0$，矛盾，因此 $f(1)=0$，代入(#)可知对于任意实数 y，$f(y)=0$。

容易验证，$f(x)=0$ 或者 $f(x)=c,1\le c<2$ 都满足要求，是全部的解。

解 2：由已知对于任意实数 x,y 有 $f(x)\left[f(y)\right]=f\left(\left[x\right]y\right)=f\left(\left[\left[x\right]\right]y\right)=f\left(\left[x\right]\right)\left[f(y)\right]$，因此 $\left(f\left(\left[x\right]\right)-f(x)\right)\left[f(y)\right]=0$。

若对于任意实数 y 都有 $\left[f(y)\right]=0$，则在原式中令 $x=1$ 可得 $f\left(y\right)=f(1)\left[f(y)\right]=0$，也即 $f(x)\equiv 0$。

若存在一个实数 y_0 使得 $\left[f(y_0)\right]\neq 0$，则对于任意实数 x，$f(x)=f\left(\left[x\right]\right)$。因此 $f(x)=f\left(\left[x\right]\cdot 1\right)=f(x)\left[f(1)\right]$，故 $f(y_0)=f(y_0)\left[f(1)\right]$，因此 $\left[f(1)\right]=1$。故 $1\le f(1)=f\left(2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=f(2)\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=f(2)\left[f\left(\left[\dfrac{1}{2}\right]\right)\right]=f(2)\left[f(0)\right]$，故 $\left[f(0)\right]\neq 0$。在原式中令 $y=0$ 可得 $f(0)=f(x)\left[f(0)\right]$，故 $f(x)$ 是一个常数函数，令 $f(x)=c$，当然也有 $f(1)=c$，故 $\left[c\right]=\left[f(1)\right]=1$，即 $1\le c<2$。

容易验证，$f(x)=0$ 或者 $f(x)=c,1\le c<2$ 都满足要求。

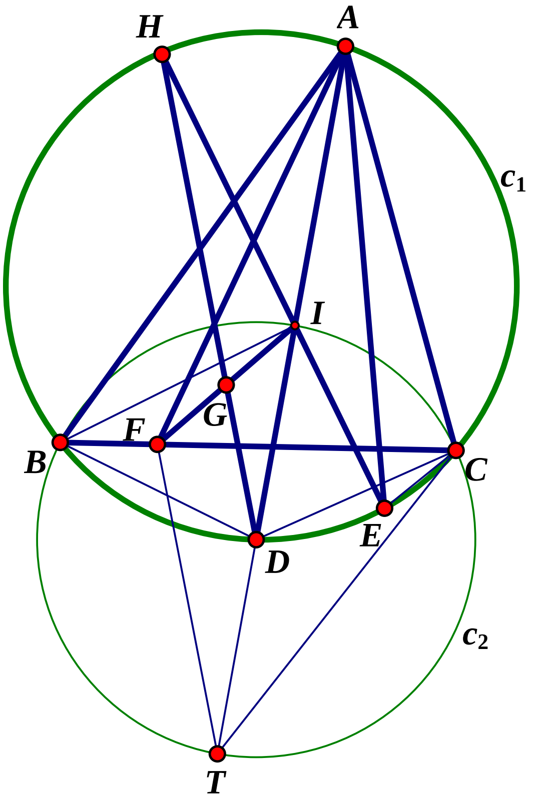
（此题全场平均分 5.45，中国队平均 6.83 分）

2、I 是 ΔABC 的内心，c_1 是 ΔABC 的外接圆。AI 与 c_1 交于 D 点，E 在 $\overset{\frown}{BDC}$ 上，F 在 BC 上，并且 $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$，$G$ 为 IF 的中点，证明：EI, DG 的交点在 c_1 上。

证明：由于 I 是 ΔABC 的内心，$\angle DBI = \frac{1}{2}\left(\angle BAC + \angle ABC\right) = \angle DIB$，故 $DI = DB$，同理 $DI = DC$，以 D 为圆心 DI 为半径作圆 c_2，延长 AD 交 c_2 于 T 点，则 $GD \parallel FT$。

由已知条件 $\Delta ABF \sim \Delta AEC$，所以 $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AC}$，故 $AB \cdot AC = AE \cdot AF$。而 $\angle ATC = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABI$，因此 $\Delta ABI \sim \Delta ATC$，故 $\frac{AB}{AI} = \frac{AT}{AC}$，因此 $AE \cdot AF = AB \cdot AC = AI \cdot AT$，所以 $\frac{AE}{AI} = \frac{AT}{AF}$。

由于 $\angle FAT = \angle IAE$，因此 $\Delta AEI \sim \Delta ATF$，故 $\angle AEI = \angle ATF$，由于 $GD \parallel FT$，所以 $\angle IDG = \angle ATF$，因此 $\angle AEI = \angle IDG$，设 EI, DG 的交点为 H，则 A, E, D, H 四点共圆，此圆过 A, E, D 这三个点，因此就是 c_1，故 EI, DG 的交点在 c_1 上。



（此题全场平均分 2.59，中国队平均 7 分）

3、 N 表示全体正整数，求所有的函数 $g:N\to N$ ，是的对于任意 $m,n\in N$ ，$\left(g(m)+n\right)\left(g(n)+m\right)$ 都是完全平方数。

解：对于任意正整数 n ，由已知 $\left(g(n+1)+n\right)\left(g(n)+n+1\right)$ 是平方数，由于两个连续的正整数乘积都不是平方数，因此 $g(n+1)\neq g(n)$ 。

令 $d=\left|g(n+1)-g(n)\right|$ ，若 $d\geq 2$ ，任取素数 $p\,|\,d$ ，则 $g(n+1)\equiv g(n)(\bmod p)$ ，令 $g(n+1)-g(n)=p^{\alpha}k$ ，其中 $(k,p)=1$，则 $m+g(n+1)=\left(m+g(n)\right)+p^{\alpha}k$ (*)。

若 $\alpha\geq 2$ ，我们取 m 使得 $m+g(n+1)$ 等于 $p^{\beta+2}+p>\left|p^{\alpha}k\right|$，则 $p\,\|\,m+g(n+1)$ ，由(*)也有 $p\,\|\,m+g(n)$；

若 $\alpha=1$，取 m 使得 $m+g(n+1)=p^{\beta+4}+p^{3}>\left|pk\right|$，则有 $p^{3}\,\|\,m+g(n+1)$，由(*)也有 $p\,\|\,m+g(n)$ 。

综上所述，总能找到一个正整数 m 使得 $m+g(n+1)$ 与 $m+g(n)$ 所含 p 的幂次为奇数。而 $g(m)+n$ 与 $g(m)+n+1$ 这两个连续正整数中必有一个与 p 互素，因此 $\left(g(m)+n\right)\left(g(n)+m\right)$ 与 $\left(g(m)+n+1\right)\left(g(n+1)+m\right)$ 中必有一个恰好含 p 的奇数次幂，不是平方数，矛盾。

因此只能有 $\left|g(n+1)-g(n)\right|=1$，故 $g(n+1)=g(n)+1$ 或 $g(n)-1$。若存在一个 n 使得 $g(n+1)=g(n)-1$，则 $\left(g(n+1)+n\right)\left(g(n)+n+1\right)=\left(g(n)+n\right)^{2}-1$ 不是平方数，矛盾。故对于所有正整数 n 均有 $g(n+1)=g(n)+1$，因此 $g(n)=n+c$ ，其中 c 是一个非负整数，容易验证 $g(n)=n+c$ 的确满足要求。

所以 $g(n)=n+c$ 是全部解，其中 c 是一个非负整数。

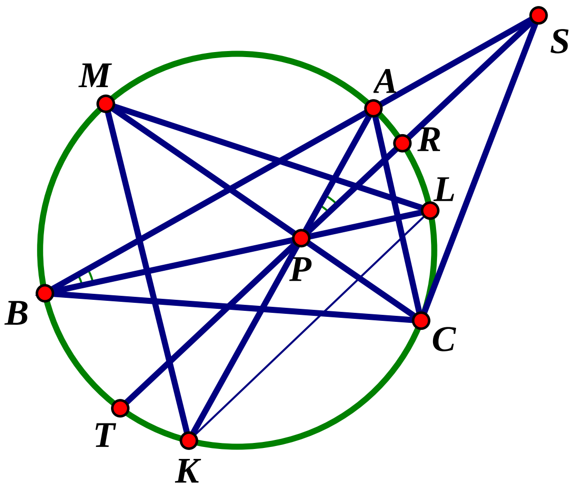
（此题全场平均分 0.46，中国队平均 3.83 分）

4、P 是 ΔABC（$AC \neq BC$）内一点，AP, BP, CP 分别与 ΔABC 的外接圆 ω 交于 K, L, M，圆 ω 在 C 点的切线与直线 AB 交于 S。已知 $SC = SP$，证明：$MK = ML$。

证明：设 SP 与圆 ω 交于 R, S 点，由于 $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$，故 $\Delta SAP \sim \Delta SPB$，因此 $\angle SPA = \angle SBP = \angle AKL$，故 $TR \parallel KL$。因此 $\angle LPR = \angle PLK = \angle PAB$。由于

$$\angle SPC = \angle LPR + \angle LPC = \angle PAB + \angle MCB + \angle PBC = \angle MLK + \angle PBC,$$
$$\angle SCP = \angle SCA + \angle ACM = \angle SBC + \angle ACM = \angle SBL + \angle PBC + \angle ACM,$$

而 $\angle SPC = \angle SCP$，所以 $\angle MKL = \angle SBL + \angle ACM = \angle MLK$，所以 $LM = KM$。



证明 2：由于 $SP^2 = SC^2 = SA \cdot SB$，故 $\Delta SAP \sim \Delta SPB$，因此 $\angle SPA = \angle SBP = \angle AKL$，故 $TR \parallel KL$。因此

$$\angle SPC = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RC} + \overset{\frown}{MT}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LR} + \overset{\frown}{MT}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{KT} + \overset{\frown}{MT}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{MK}\right)$$

而 $\angle SCP = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{ML} + \overset{\frown}{LC}\right)$，由于 $\angle SPC = \angle SCP$，所以 $\overset{\frown}{ML} = \overset{\frown}{MK}$，因此 $LM = KM$。

（此题全场平均分 5.35，中国队平均 7 分）

5、开始时在六个盒子B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6中各有一枚硬币，其后允许操作如下：①选一个不空的盒子$B_j,1\le j\le 5$，取出B_j中的一枚硬币，在B_{j+1}中加两枚硬币；②选一个不空的盒子$B_k,1\le k\le 4$，取出B_k中的一枚硬币，并交换B_{k+1},B_{k+2}中的硬币。（可以是空盒）

是否可以通过有限次操作，使得B_1,B_2,B_3,B_4,B_5中都没有硬币，而B_6中有$2010^{2010^{2010}}$枚硬币？

解：令$T=2010^{2010^{2010}}$，如果我们能够达到$\left(0,0,0,\dfrac{T}{4},0,0\right)$，其后我们不断进行操作①，则可以最终达到$\left(0,0,0,0,0,T\right)$。为了达到$\left(0,0,0,\dfrac{T}{4},0,0\right)$，我们只要能达到某个$\left(0,0,0,X,0,0\right),X\ge T$ (*)，其后进行$X-\dfrac{T}{4}$次操作②即可。以下来证明可以达到(*)：

对于任意正整数$a\ge 1$，$\left(a,0,0\right)\to\left(a-1,2,0\right)\to\left(a-1,0,4\right)$，若$a\ge 2$则继续操作$\to\left(a-2,4,0\right)\to\left(a-2,0,8\right)\to\ldots\to\left(1,0,2^a\right)\to\left(0,2^a,0\right)$，因此我们总是可以从$\left(a,0,0\right)$出发达到$\left(0,2^a,0\right)$。

对于整数$a,b\ge 1$，依据上述操作可以做到$(a,b,0,0)\to(a,0,2^b,0)\to(a-1,2^b,0,0)$。

根据规则我们可以做到以下操作：

$$\left(1,1,1,1,1,1\right)\to\left(0,1,1,1,17,1\right)\to\left(0,1,1,1,0,35\right)\to\left(0,0,35,0,0,0\right)\to\left(0,0,34,2,0,0\right)$$

然后我们可以从$\left(0,0,34,2,0,0\right)$出发达到$\left(0,0,33,2^2,0,0\right)\to\ldots\to\left(0,0,0,2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}},0,0\right)$，其中$Y=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$中有$35$个$2$。

$2010<2048=2^{11}<2^{2^{2^2}}$，因此$T=2010^{2010^{2010}}<2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}=Y$，所以此我们可以通过有限次操作，使得$B_1,B_2,B_3,B_4,B_5$中都没有硬币，而$B_6$中有$2010^{2010^{2010}}$枚硬币。

（此题 IMO 平均分 0.93，中国队平均 4 分）

6、 $a_1,a_2,\ldots$ 是一个正实数数列， s 是一个正整数，对于任意正整数 $n>s$ 都有 $a_n=Max\left\{a_k+a_{n-k}\left|1\le k\le n-1\right.\right\}$。证明：存在一个正整数 $l\le s$ 以及正整数 N，对于任意 $n\ge N$ 都有 $a_n=a_l+a_{n-l}$。

证明：令 $t=Max\left\{\frac{a_i}{i}\left|1\le i\le s\right.\right\}$，则对于 $1\le i\le s$ 都有 $\frac{a_i}{i}\le t$ (*)，若(*)对于所有 $i<n$ 都成立，则 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{k'}+a_{n-k'}}{k'+(n-k')}\le t$，故对于任意正整数 n，均有 $\frac{a_n}{n}\le t$，令 $t=\frac{a_r}{r},1\le r\le s$。

令 $b_n=nt-a_n$，则 $b_n\ge 0$，由定义可知 a_n 可以表示成为 $\sum_{i=1}^{s}p_ia_i$ 形式，其中 p_i 为非负整数，并且 $\sum_{i=1}^{s}ip_i=n$。因此 $b_n=\sum_{i=1}^{s}p_i(it-a_i)=\sum_{i=1}^{s}p_ib_i$ (*)。

对于任意正整数 i，$b_{i+(k+1)r}-b_{i+kr}=rt-a_{i+(k+1)r}+a_{i+kr}=-\left(a_{i+(k+1)r}-a_{i+kr}-a_r\right)\le 0$，并且 $b_n\ge 0$，因此子数列 $b_i,b_{i+r},b_{i+2r},\ldots$ 是不增的非负数列。而由(*)可知 b_{i+kr} 可以表示成为若干个 $\{b_1,b_2,\ldots,b_s\}$ 的和（可能重复），由于 $b_{i+kr}\le b_i$，所以每个 $b_j>0$ 在和式中最多出现 $\left[\frac{b_i}{b_j}\right]$ 次，因此这样的取值是有限种的。故 k 充分大时，b_{i+kr} 变成常数。

因此，当 n 充分大时 b_n 的取值只与 n 除以 r 的余数相关，所以存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时 $b_n=b_{n-r}$，故 $nt-a_n=(n-r)t-a_{n-r}$，所以 $a_n=a_{n-r}+rt=a_{n-r}+a_r$。

综上所述，结论成立。

（此题 IMO 平均分 0.37，中国队平均 4.17 分）